

NUVENS HP: UMA PROPOSTA SEM MALHA PARA O MEC

Adriano Scremin

Universidade Federal do Paraná – Departamento de Engenharia Mecânica
Cx. P. 19011 – 81531-900 – Curitiba, PR, Brasil

***Resumo.** Duarte & Oden (1996) desenvolveram recentemente uma família de funções aproximadoras, denominadas nuvens hp, capaz de aproximar funções com convergência controlável por parâmetros bem definidos e de fácil manipulação: os parâmetros h e p . Essas funções caracterizam-se por ter suporte esférico, denominado nuvem, centrado em pontos do domínio arbitrariamente definidos. O tamanho das nuvens fica definido a partir da distribuição dos pontos centrais de cada nuvem e das intrínsecas exigências de superposição de nuvens. Este método é isento de razão de aspecto, e não requer a elaboração de uma malha, diminuindo o tempo de pré-processamento. O MEC usualmente emprega uma discretização das grandezas físicas a partir de uma malha de elementos finitos disposta sobre o contorno do domínio do problema. Para a obtenção da solução aproximada da equação integral de contorno própria do MEC, no presente artigo é implementada a discretização sem malha do método das nuvens hp a problemas bidimensionais de Laplace. Resultados obtidos da aplicação a alguns problemas típicos da engenharia mecânica são graficamente apresentados e confrontados às respectivas soluções analíticas disponíveis. A análise desses resultados permite identificar a influência dos parâmetros h e p da família de nuvens hp sobre o erro da solução aproximada.*

***Palavras-chave:** Nuvens hp, Método dos elementos de contorno, Solução de equações integrais*

1 INTRODUÇÃO

Duarte & Oden (1996) desenvolveram o método das nuvens hp para a aproximação de funções. Eles as aplicaram à solução de problemas do contínuo pelo método de Galerkin. Já Taylor et al. (1995) as empregaram também para solução desses problemas, mas pelo método de colocação direta na equação diferencial. Scremin (1998) propôs, analisou e discutiu a implementação bidimensional das nuvens hp na solução de equações integrais de Laplace pelo método da colocação. Este artigo é uma síntese da implementação e de alguns resultados alcançados neste último.

O artigo começa apresentando as nuvens hp para a seguir mostrar a sua implementação na equação integral de Laplace. Dois problemas potenciais da mecânica são escolhidos para exemplificação do novo método e posterior análise e discussão. Conclui-se o artigo com um apanhado dos principais resultados atingidos ao longo da exposição.

2 AS NUVENS HP

2.1 O método dos mínimos quadrados móveis (MMQM): gerador de uma partição da unidade

Seja $\Omega \in \mathfrak{R}^n$, $n = 1, 2$ ou 3 , um domínio aberto e limitado. Q_N denota um conjunto de N pontos $x_\alpha \in \Omega$ arbitrariamente escolhidos denominados nós

$$Q_N = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}, x_\alpha \in \overline{\Omega}. \quad (1)$$

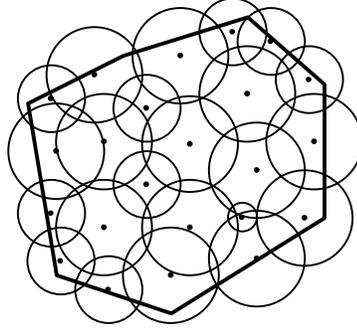


Figura 1 - Cobertura aberta com bolas centradas nos nós.

Associa-se a Q_N uma *cobertura aberta finita* de Ω , $\mathfrak{T}_N := \{\omega_\alpha\}_{\alpha=1}^N$, Fig. 1, onde:

$$\omega_\alpha = \{y \in \mathfrak{R}^n \mid \|x_\alpha - y\|_{\mathfrak{R}^n} < h_\alpha\} \quad (2)$$

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{\alpha=1}^N \omega_\alpha. \quad (3)$$

Suponha que uma função $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathfrak{R}$, $\overline{\Omega} \subset \mathfrak{R}^n$, $n = 1, 2$ ou 3 , deva ser aproximada e que são dados seus valores u_I no conjunto de nós Q_N . Seja $L_y u$ uma aproximação *local* de u para cada ponto $y \in \overline{\Omega}$ obtida a partir de um conjunto de m funções, $\mathcal{P} = \{P_i\}_{i=1}^m$:

$$(L_y u)(x) := \sum_{i=1}^m a_i(y) P_i(x), P_i \in \mathcal{P}. \quad (4)$$

Os coeficientes $a(y) := \{a_i(y)\}_{i=1}^m$ são determinados minimizando o erro na seguinte norma:

$$J(a^*) = \sum_{\alpha=1}^N W_\alpha(y) \left(u - \sum_{i=1}^m a_i^*(y) P_i \right)^2 \leq \sum_{\alpha=1}^N W_\alpha(y) \left(u - \sum_{i=1}^m a_i(y) P_i \right)^2, \quad (5)$$

onde:

$$W_\alpha(y) = w_\alpha(y - x_\alpha) \geq 0, \forall y \in \Omega \text{ e } x_\alpha \in \overline{\Omega} \quad (6)$$

é uma função centrada em x_α e de suporte ω_α que pondera a influência da proximidade dos nós de Q_N sobre a aproximação em y .

A desigualdade Eq. (5) implica que:

$$a_k^*(y) = \sum_{j=1}^m A_{kj}^{-1} \sum_{\alpha=1}^N W_\alpha(y) u(x_\alpha) P_j(x_\alpha), \quad (7)$$

onde:

$$A_{kj} := \sum_{\alpha=1}^N W_\alpha(y) P_i(x_\alpha) P_j(x_\alpha). \quad (8)$$

Substituindo a Eq. (7) na Eq. (4) obtém-se:

$$(L_y u)(x) := \sum_{\alpha=1}^N \varphi_\alpha^y(x) u_\alpha = \sum_{\alpha=1}^N \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m P_k(x) A_{kj}^{-1}(y) W_\alpha(y) P_j(x_\alpha) u_\alpha. \quad (9)$$

Movendo o ponto x até y -daí o nome, método dos mínimos quadrados *móveis*-, i.e., fazendo $x = y$ nas expressões obtidas para a aproximação *local*, obtêm-se as *funções de forma globais*:

$$\varphi_\alpha(y) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m P_k(y) A_{kj}^{-1}(y) W_\alpha(y) P_j(x_\alpha), \quad \forall y \in \bar{\Omega}. \quad (10)$$

Duarte & Oden (1996) mostraram que as funções dadas pela Eq. (10) gozam da seguinte propriedade de uma partição da unidade:

$$\sum_{\alpha=1}^N \varphi_\alpha(y) = 1, \quad \forall y \in \Omega. \quad (11)$$

2.2 A família de nuvens hp

Seja \mathcal{L}_p o conjunto do produto tensorial dos polinômios de Legendre $L_{r,s,t}$ no \mathfrak{R}^3 :

$$L_{rst} = L_r(x_1) L_s(x_2) L_t(x_3), \quad 0 \leq r, s, t \leq p. \quad (12)$$

Seja $\{\varphi_\alpha^k\}_{\alpha=1}^N$ em $\bar{\Omega}$ o conjunto de funções obtido do MMQM a partir da base completa de polinômios de grau menor ou igual a k , $\mathcal{L} = \{L_{rst}\}_{r,s,t=1}^k$.

A família de nuvens hp, $F_N^{k,p}$, é obtida adicionando-se hierarquicamente a $\{\varphi_\alpha^k\}_{\alpha=1}^N$ ($p-k$) polinômios de grau $p > k$ multiplicados por cada uma das funções que compõe o conjunto $\{\varphi_\alpha^k\}_{\alpha=1}^N$, ou, de outra forma,

$$F_N^{kp} := \{\{\varphi_\alpha^k(x)\} \cup \{\varphi_\alpha^k L_{rst}(x)\} : 1 \leq \alpha \leq N; 0 \leq r, s, t \leq p, r \text{ ou } s \text{ ou } t > k; p \geq k\}. \quad (13)$$

Duarte & Oden (1996) concluíram que famílias da forma $F_N^{k=0,p}$ são computacional e numericamente mais eficientes que as demais. Scremin (1998) concluiu o mesmo quando implementou as nuvens hp na solução de equações integrais de contorno.

2.3 Ilustração

A seguir, Fig. 2, são mostradas funções partição da unidade $\varphi_i(x)$ obtidas sobre o conjunto $Q_{11} = \{x_i = -1 + 0,2 \cdot (i-1), i = 1, 2, \dots, 11\}$ do intervalo $\Omega = [-1, +1]$ a partir da Eq. (10) aplicada ao conjunto $\mathcal{L} = \{1\}$ com função de ponderação dada pela Eq. (14).

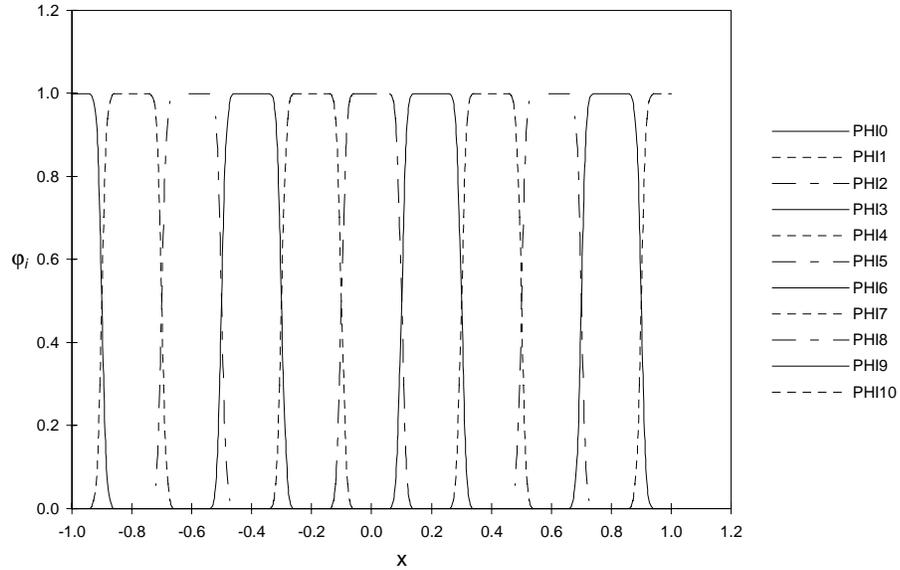


Figura 2 - Funções de uma partição da unidade obtida pelo MMQM.

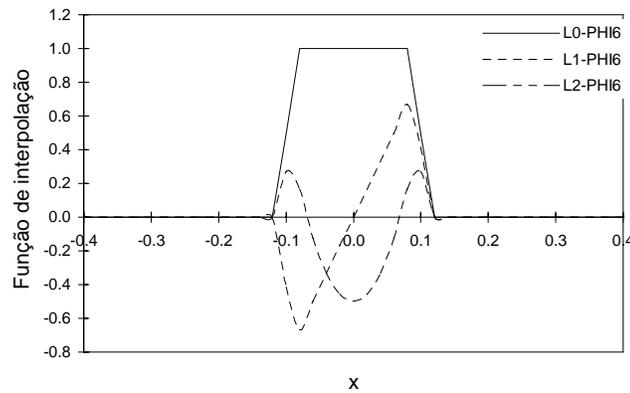


Fig.3 - Funções membros da família $F_{N=11}^{k=0,p=2}$.

$$F_{N=11}^{k=0,p=2} w_h(x - x_i) = \begin{cases} \sqrt{4/\pi} \left(1.0 - \frac{|x - x_i|^2}{h^2} \right)^4, & |x - x_i| < h, \\ 0, & |x - x_i| \geq h \end{cases} \quad (14)$$

Um raio de 0,15 é escolhido para as nuvens de tal modo que verifique as exigências de cobertura impostas pelo MMQM, conforme Duarte & Oden (1996).

Na Fig. 3 são apresentados 3 membros da família $F_{N=11}^{k=0,p=2}$ obtida a partir do conjunto $\varphi_i(x)$ ilustrado anteriormente. Esses membros são o resultado da multiplicação de polinômios de Legendre à função φ_6 da partição da unidade mostrada na Fig. 2.

3 IMPLEMENTAÇÃO DAS NUVENS HP À SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES INTEGRAIS DE CONTORNO PELO MÉTODO DA COLOCAÇÃO

3.1 Formas integrais de contorno

Seja um problema qualquer da mecânica do contínuo no \mathcal{R}^2 regido pela equação de Laplace:

$$\nabla^2 u = 0, \quad \text{em } \Omega, \quad (15)$$

com condições de contorno genericamente dadas por:

$$ru + sq = f, \quad \text{em } \Gamma, \quad (16)$$

A representação integral da solução do problema, Eqs. (15) e (16), é:

$$u_i + \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma = \int_{\Gamma} q u^* d\Gamma. \quad (17)$$

$u^* = -\frac{1}{2\pi} \ln r$ é a solução fundamental do problema:

$$\nabla^2 u = -\delta_i, \quad (18)$$

onde r é a distância do ponto fonte x_i a um ponto genérico x do contorno, e δ_i é a função delta de Dirac no mesmo ponto fonte x_i .

Tomando x_i sobre o contorno obtém-se a equação integral de contorno:

$$\frac{1}{2} u_i + \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma = \int_{\Gamma} q u^* d\Gamma. \quad (19)$$

3.2 Formas discretizadas

É comum no método dos elementos de contorno aproximar a geometria e os valores de contorno por elementos finitos. No entanto aqui, os valores de contorno são aproximados por nuvens hp e a curva do contorno é exatamente representada. Faz-se necessário, portanto, realizar as aproximações num domínio parametrizado, isto é, as nuvens hp são geradas sobre o domínio de parametrização da curva do contorno, Fig. 4. Nesta implementação optou-se ainda pela parametrização por trecho regular da curva. Por simplicidade, o domínio de parametrização de cada trecho corresponde ao intervalo $[-1,+1]$. A variável de parametrização é designada aqui por ξ .

O potencial u e seu fluxo normal q aproximados por nuvens hp em cada trecho t assumem respectivamente as formas:

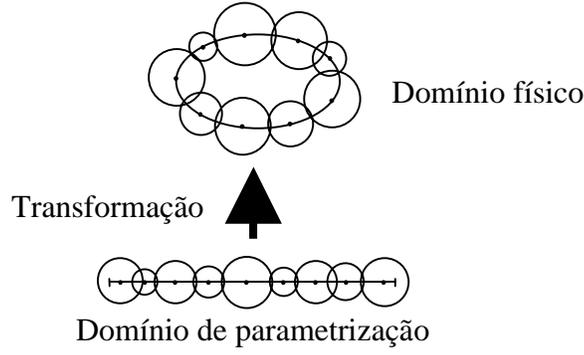


Figura 4 – Transformação do domínio de parametrização para o contorno.

$$u^t(\xi) = \sum_{j=1}^{J_t} \Phi_j^t(\xi) u_j^t, \quad (20)$$

$$q^t(\xi) = \sum_{j=1}^{J_t} \Phi_j^t(\xi) q_j^t, \quad (21)$$

onde Φ_j^t são funções membros de uma família genérica $F_N^{k,p}$ no trecho t .

Substituindo devidamente as aproximações dadas pelas Eqs. (20) e (21) na equação integral, Eq. 19, obtém-se a forma usual $HU = GQ$, ou seja:

$$\sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^{J_t} h_{ij}^t u_j^t = \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^{J_t} g_{ij}^t q_j^t, \quad (22)$$

cujos coeficientes são:

$$h_{ij}^t = \frac{1}{2} \delta_{it} \Phi_j^t(\xi_i^{t_i}) + \int_{\xi_0^{ij}}^{\xi_1^{ij}} q^* (\xi_i^{t_i}, \bar{\xi}) \Phi_j^t(\bar{\xi}) J(\bar{\xi}) d\bar{\xi}, \quad (23)$$

$$g_{ij}^t = \int_{\xi_0^{ij}}^{\xi_1^{ij}} u^* (\xi_i^{t_i}, \bar{\xi}) \Phi_j^t(\bar{\xi}) J(\bar{\xi}) d\bar{\xi}, \quad (24)$$

onde i designa o ponto de colocação, j a nuvem no trecho, t o trecho regular do contorno, t_i o trecho regular que contém o ponto de colocação, T o número total de trechos regulares do contorno, J_t o número de nuvens por trecho, $J(\bar{\xi})$ é o jacobiano da transformação entre o domínio de parametrização e o contorno, ξ_0^{ij} e ξ_1^{ij} são os extremos do intervalo de integração, isto é, da nuvem, e δ é o delta de Kronecker.

As integrações numéricas envolvidas na determinação dos coeficientes h_{ij}^t e g_{ij}^t seguem aqui as formas propostas em Scremin (1998) conforme o ponto de colocação relativamente à nuvem no contorno leve a um integrando regular, quase-singular ou singular.

Atendo-se às condições de contorno, Eq. (16), pode-se ter, conforme sejam os valores de r e s : condições de Dirichlet, se $s \equiv 0$; condições de Neumann, se $r \equiv 0$; mistas se em trechos distintos do contorno ora $r \equiv 0$, ora $s \equiv 0$; ou condições de Robin se r e s não são identicamente nulas sobre o contorno. O modo de se obter a forma algébrica, $Ax = b$, da equação original para qualquer condição de contorno encontra-se em Scremin (1998).

4 APLICAÇÃO A ALGUNS PROBLEMAS DO CONTÍNUO

4.1 Condução de calor

A Fig. 5 mostra uma aleta em regime permanente de transferência de calor. Ela pode ser considerada bidimensional desde que se suponha que sua largura seja muito grande. A equação que rege o campo de temperatura no seu interior é a equação de Laplace, Eq.(15). O comprimento, L , da aleta é tomado muito grande para impor temperatura igual à ambiente na extremidade livre. Assim, as condições de contorno para as quatro faces são de Dirichlet:

$$T(0, y) = T_b, \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} T(x, y) = T_\infty, \quad (25)$$

e de Robin:

$$-k \frac{\partial T}{\partial y} \left(x, \frac{H}{2} \right) = h(T - T_\infty), \quad \text{e} \quad k \frac{\partial T}{\partial y} \left(x, -\frac{H}{2} \right) = h(T - T_\infty), \quad (26)$$

onde k e h são os coeficientes de condução térmica do material da aleta e o coeficiente de convecção térmica do meio fluido que a circunda, respectivamente.

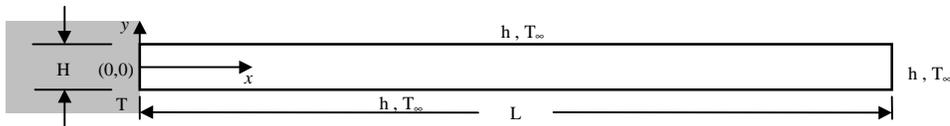


Figura 5 - Condução de calor em regime permanente em uma aleta.

Nestas circunstâncias a solução analítica do problema é dada em termos de série de Fourier, conforme Bejan (1996):

$$T = T_\infty + \sum_{n=1}^{\infty} K_n e^{-\lambda_n x} \cos(\lambda_n y), \quad (27)$$

onde:

$$\lambda_n = 2 \frac{a_n}{H}, \quad a_n \tan(a_n) = \frac{hH}{2k}, \quad \text{e} \quad K_n = 2(T_b - T_\infty) \frac{\sin a_n}{a_n + \sin a_n \cos a_n}, \quad (28)$$

$\frac{hH}{2k}$ sendo o número de Biot com base na meia espessura da aleta.

Para que a Eq.(27) possa ser aplicada com bons resultados toma-se um valor de L suficientemente elevado para que o fluxo de calor seja desprezível, ou a temperatura seja praticamente igual à ambiente, em $x = L$. No exemplo adota-se, pois, $Bi = 2000$, $L = 0,02$ m e $H = 0,001$ m.

Nos ensaios numéricos do método proposto considera-se apenas a metade superior da aleta aproveitando a simetria do problema. A condição de contorno sobre o plano de simetria é de fluxo de calor nulo. Condição de fluxo de calor nulo é imposta na extremidade livre, o que não afeta em nada o problema original. Na face em contato com a parede tem-se condição de Dirichlet com $T_b = 100^\circ\text{C}$, e condição de Robin na face superior com $T_\infty = 20^\circ\text{C}$.

A temperatura e o fluxo de calor normal variam bruscamente junto à parede ao longo da direção x , e de igual modo o fluxo de calor normal sobre a face colada à parede. Assim, nessas faces são propostas para comparação duas distribuições de nuvens: uma uniforme e outra segundo uma escala logarítmica, Fig. 6, concentrando mais pontos de nuvens na região de gradiente elevado.

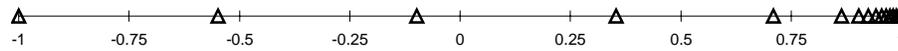


Figura 6 - Distribuição logarítmica de pontos de nuvens.

Empregam-se nos ensaios as famílias $F_{N=16}^{k=0, p=0,1,2,3}$ em cada face da aleta, qualquer que seja a distribuição de nuvens adotada. Os erros relativos da temperatura e do fluxo de calor normal, respectivamente ao longo do eixo de simetria e da parede resfriada, para cada uma das famílias encontram-se na Tab. 1.

	$F_{N=16}^{k=0, p=0}$	$F_{N=16}^{k=0, p=1}$	$F_{N=16}^{k=0, p=2}$	$F_{N=16}^{k=0, p=3}$
Temperatura ao longo do plano de simetria	3.28E-02	1.11E-02	4.23E-03	1.34E-03
Fluxo de calor ao longo da parede resfriada	3.07E-01	1.07E-01	7.54E-02	6.36E-02

Tabela 1 – Erros relativos na norma H_0 da temperatura ao longo do plano de simetria, $(x,0)$, e do fluxo de calor normal ao longo da parede resfriada, $(0,y)$.

4.2 Torção em barra de seção elíptica

Seja a seção transversal de uma barra de seção elíptica mostrada na Fig. 7. A teoria de Saint-Venant assume que a deformação de uma barra em torção pura consiste de rotação e empenamento da seção transversal. O empenamento é suposto o mesmo para todas as seções transversais da barra. Os deslocamentos correspondentes à rotação da seção transversal são:

$$v_x = -\theta z y \quad \text{e} \quad v_y = \theta z x, \quad (29)$$

onde θz é o ângulo de torção da seção transversal a uma distância z da origem. O empenamento da seção transversal é definido por:

$$v_z = \theta \Psi(x, y), \quad (30)$$

onde $\Psi(x, y)$ é a função de empenamento.

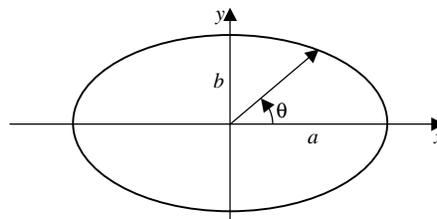


Figura 7 - Seção transversal de uma barra de seção elíptica.

Na ausência de forças de campo, a função de empenamento é regida pela equação de Laplace, Eq. (15). Conforme Timoshenko & Goodier (1951), uma vez imposta a condição de contorno para o problema, obtêm-se respectivamente o empenamento e o seu fluxo normal:

$$\Psi = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} xy, \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial n} \Psi = \frac{b^2 - a^2}{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^{\frac{1}{2}}} xy, \quad (31)$$

onde a, b estão indicados na Fig. 7.

Para o ensaio numérico adota-se sem mais uma seção elíptica com $a = 0,10$ m e $b = 0,05$ m. Impõe-se a condição de Dirichlet, isto é, empenamento conhecido sobre o contorno. Empregam-se as famílias $F_{N=8}^{k=0, p=1}$ e $F_{N=16}^{k=0, p=1, 2}$. Os resultados do fluxo normal do empenamento em função do ângulo θ da Fig. 7 para cada uma das famílias encontram-se no gráfico da Fig. 8.

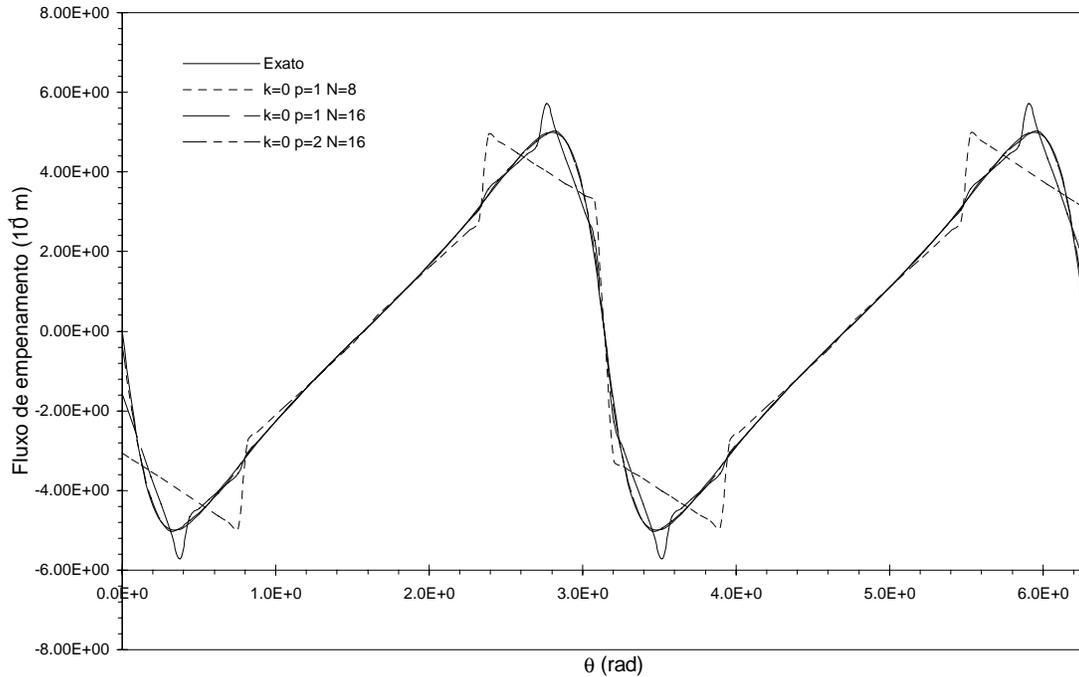


Figura 8 – Fluxo normal de empenamento sobre o contorno de uma seção elíptica.

5 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Scremin (1998) mostrou numericamente que o erro relativo da solução aproximada u_h na norma H^0 pode ser estimado por:

$$\|u - u_h\|_{H^0(\Gamma)} \leq Ch^{p+1} \|u\|_{H^{p+1}(\Gamma)}. \quad (38)$$

O efeito do parâmetro p sobre a solução obtida observados na Tab.1 estão em conformidade com a Eq.(38): quanto maior p menor é o erro da solução aproximada.

De igual modo o gráfico da Fig. 10 apresenta resultados esperados segundo a mesma Eq.(38): o incremento do número de nuvens, ou, o que é o mesmo, a diminuição do raio das nuvens, leva à diminuição do erro da solução aproximada. As oscilações observadas em torno da solução exata é inerente ao grau de precisão empregado, quer ele seja ajustado pelo tamanho ou número de nuvens, quer seja pelo parâmetro p . Vale observar que uma escolha adequada de pontos e de raios de nuvens poderia reduzir significativamente as oscilações observadas.

A solução obtida com as nuvens hp é notoriamente contínua, muito embora, ocorram regiões em que o comportamento é repentinamente alterado devido à superposição de nuvens, como pode ser bem observado na Fig. 8 para a curva da família $F_{N=8}^{k=0, p=1}$.

6 CONCLUSÃO

Apresentou-se uma forma original que implementa as nuvens hp à solução de equações integrais de contorno de Laplace. As nuvens hp foram aplicadas à aproximação das variáveis de contorno a partir de um domínio de parametrização da curva do contorno. A simples substituição da aproximação do potencial e do fluxo normal na equação integral levou à forma discreta usual do método de elementos de contorno, $HU = GQ$. A solução final do problema vem do sistema algébrico $Ax = b$ que resulta da aplicação de quaisquer condições de contorno. Aplicou-se o método a um problema de condução de calor em regime permanente e a um outro de torção em barra para ilustração e análise do método. Os resultados comprovam a eficiência do método. Deles se atesta o enriquecimento da solução aproximada pelo incremento dos parâmetros p e h das famílias.

Dado que são suficientes para o método a especificação do número de nuvens e de p , isto é, não é necessário elaborar uma malha, o trabalho de pré-processamento fica reduzido, agilizando o refinamento sucessivo. Este é o aspecto relevante no método apresentado.

REFERÊNCIAS

- Bejan, A., 1996, Transferência de calor, Edgard Blücher, São Paulo.
- Duarte, C.A.; Oden, J.T., 1996, H-p Clouds -an h-p Meshless Method, Numerical Methods for Partial Differential Equations, pp.1-34,.
- Scremin, A., Solução de problemas da mecânica do contínuo na forma de equações integrais de contorno pelo método das nuvens hp: aplicação a problemas bidimensionais de Laplace, Tese de Doutorado, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, São Paulo, Brasil.
- Taylor, R.L.; Zienkiewicz, O.C.; Oñate, E.; Idelsohn, S., 1995, Moving Least Square Approximations for Solution of Differential Equations, CIMNE 74, 31.
- Timoshenko, S.; Goodier, J.N., 1951, Theory of elasticity, McGraw-Hill, New York.

HP-CLOUDS: A MESHLESS PROPOSAL FOR BEM

Abstract. Duarte & Oden (1996) developed the Hp-Clouds method, a family of approximating functions which is able to approximate functions with any desired rate of convergence by two controllable, well defined and easy handling parameters: the h and p parameters. These functions have spherical support, named cloud, centered at arbitrary defined points that have intrinsic necessity of clouds superposition. The Hp-Clouds method is free of aspect ratio and needs no meshing, decreasing preprocessing time. BEM usually employs a finite element discretization mesh disposed on the boundary of the domain. In this article the Hp-Clouds meshless method is implemented for obtaining an approximated solution for the proper boundary integral equation of BEM. It is restricted to two-dimensional Laplace problems. Results obtained for some typical mechanical engineering problems are displayed against analytical solution. Analyzing these results one identifies the influence of the h and p parameters of the Hp-Clouds family on the approximated solution error.

Key-words: Hp-Clouds, Boundary elements method, Solution of integral equations